

Расчет переходных процессов

Курсовая работа

БГТУ.04.131.030.00КР

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инд. № аудл.	Подп. и дата

21 мая 2005 г.

Содержание

1	Исходные данные	3
2	Решение задачи классическим методом	4
2.1	Составление системы дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа	4
2.2	Нахождение дифференциального уравнения относительно величины $u_c(t)$	5
2.3	Нахождение дифференциального уравнения относительно величины $i_L(t)$	6
2.4	Определение характеристического уравнения по входному сопротивлению цепи	6
2.5	Определение характеристического уравнение методом D-алгебраизации . . .	7
2.6	Определение корней характеристического уравнения	8
2.7	Запись решения свободной составляющей $u_c(t)$	9
2.8	Расчет принужденной составляющей u_c	9
2.9	Расчет начальных независимых и зависимых условий по законам коммутации и исходной системе уравнений при $t = 0_+$	11
2.10	Запись полного решения $u_c(t)$	12
2.11	Определение постоянных интегрирования A_1 и A_2	12
2.12	Численное определение токов и напряжений в схеме	13
3	Решение задачи операторным методом	15
3.1	Определение начальных условий схемы после коммутации ($t = 0_+$)	15
3.2	Составление операторной схемы замещения	16
3.3	Составление системы алгебраических уравнений в операторном виде	17
3.4	Нахождение операторного изображения искомой величины $U_c(p)$	17
3.5	Нахождение оригинала искомой функции $u_c(t)$	18
3.6	Нахождение изображения величины $I_L(p)$	19
3.7	Нахождение оригинала функции $i_L(t)$	19
4	Составление системы уравнений по методу переменных состояния .	21
4.1	Составить систему по законам Кирхгофа	21
4.2	Преобразовать полученную систему в систему уравнений в форме Коши относительно производных состояния	21
4.3	Найти переменные состояния	23
5	Построение графиков токов и напряжений	24
5.1	Проверка графиков токов и напряжений	25

Перв. примен. БГТУ.04.131.030.00КР

Справ. №

Подп. и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инв. № подл.

БГТУ.04.131.030.00КР				
<i>Изм.</i>	<i>Лист</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Подп.</i>	<i>Дата</i>
<i>Разраб.</i>		Бунин Е. А.		
<i>Проб.</i>		Торамаян О. С.		
<i>Н.контр.</i>				
<i>Утв.</i>				
Расчет переходных процессов Курсовая работа			<i>Лит.</i>	<i>Лист</i>
			2	28

2 Решение задачи классическим методом

Для нахождения законов изменения токов $i_L(t)$, $i_2(t)$, $i_c(t)$ и напряжений на емкости $u_c(t)$ и индуктивности $u_L(t)$ необходимо знать полное напряжение, которое представляется в виде суммы принужденной и свободной составляющей напряжения:

$$u_c(t) = u_{c\text{ пр}} + u_{c\text{ св}}(t). \quad (1)$$

Так как ЭДС постоянного напряжения, то $u_{c\text{ пр}}$ не является функцией времени. Для определения $u_c(t)$ в уравнении (1) необходимо знать принужденную и свободную (зависит от постоянных интегрирования и корней характеристического уравнения) составляющие напряжения. Нахождение всех этих неизвестных составляет суть классического метода. В подразделах 2.2, 2.3, 2.4, 4.3 рассмотрены различные способы нахождения характеристического уравнения.

2.1 Составление системы дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа

Перерисуем схему на рис. 1 в момент коммутации — рис. 2.

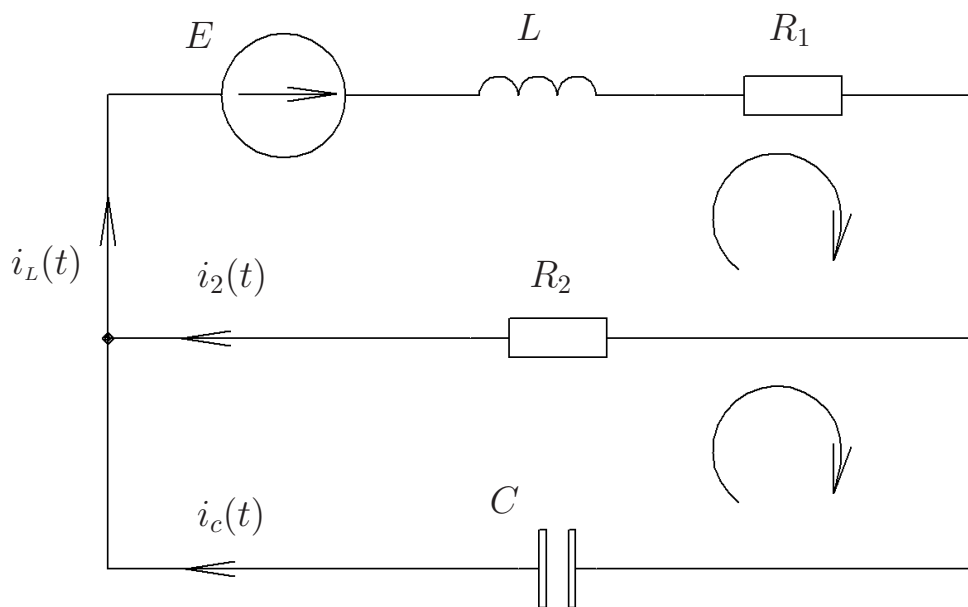


Рис. 2

Запишем систему уравнений (1.1) для момента времени после коммутации. Количество уравнений в системе должно быть равно числу неизвестных токов. Уравнение (2) составим по первому закону Кирхгофа, второе и третье — по второму:

Инд. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инд. № дубл.
Подп. и дата	Подп. и дата
Изм.	Лист

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист
4

теперь заменим соответственно $\frac{d^2 u_c}{dt^2}$, $\frac{du_c}{dt}$, $u_c(t)$ на α^2 , α , 1, получим характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \alpha + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} = 0. \quad (9)$$

2.3 Нахождение дифференциального уравнения относительно величины $i_L(t)$

Выразим из системы (1.1) $i_L(t)$, для этого исключим токи $i_2(t)$, $i_c(t)$ и напряжение $u_c(t)$ из системы.

Подставим (3) \rightarrow (4)

$$i_c(t) = C \frac{d}{dt} [R_2 i_2(t)] = R_2 C \frac{di_2}{dt}. \quad (10)$$

В уравнение (1) подставим (10)

$$i_L(t) - i_2(t) - R_2 C \frac{di_2}{dt} = 0. \quad (11)$$

Из (3) выразим $i_2(t)$

$$i_2(t) = \frac{E - R_1 i_L(t) - L \frac{di_L}{dt}}{R_2}. \quad (12)$$

Уравнение (12) \rightarrow (11), после преобразований получим:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \cdot \frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \cdot i_L = \frac{E}{R_2 LC}. \quad (12')$$

Заметим, что полученное линейное неоднородное дифференциальное уравнение для тока на катушке имеет идентичное характеристическое уравнение с выражением (8).

2.4 Определение характеристического уравнения по входному сопротивлению цепи

Наиболее простой способ составления характеристического уравнения цепи состоит в следующем:

2.4.1 Записывают формулу входного сопротивления цепи в комплексной форме

В цепи на рис. 2 удобнее рассматривать формулу входного сопротивления относительно ветви с источником.

Сопротивления R_2 и $\frac{1}{j\omega C}$ параллельно:

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист	6
Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инд. № дубл.	Подп. и дата		

$$Z = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (13)$$

Полное сопротивление с учетом (13):

$$Z_{\text{BX}} = j\omega L + R_1 + Z = j\omega L + R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (14)$$

2.4.2 В формуле пороижают замену сомножителя $j\omega$ на p

Преобразуем (14)

$$Z_{\text{BX}} = L\alpha + R_1 + \frac{R_2}{R_2 C\alpha + 1}. \quad (15)$$

2.4.3 Полученное выражение приравнивают нулю $Z_{\text{BX}} = 0$

Приравняв (15) нулю и преобразовав:

$$\alpha^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \alpha + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} = 0. \quad (16)$$

2.5 Определение характеристического уравнение методом D-алгебраизации

Перепишем (1.1) с учетом $u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt$ получив систему интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i_L(t) - i_2(t) - i_c(t) = 0; \\ L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L(t) + R_2 i_2(t) = E; \\ -R_2 i_2(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Сделаем замену $\frac{d}{dt} \rightarrow D, \int dt \rightarrow \frac{1}{D}$ в (1.2)

$$\begin{cases} i_L(t) - i_2(t) - i_c(t) = 0; \\ LD i_L(t) + R_1 i_L(t) + R_2 i_2(t) = E; \\ -R_2 i_2(t) + \frac{i_c(t)}{CD} = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Система (1.3) есть результат алгебраизации системы интегродифференциальных уравнений (1.2)

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	БГТУ.04.131.030.00КР				Лист
					Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Исключим в (1.3) $i_2(t)$

$$\begin{cases} i_L(t) + [-\frac{1}{R_2CD} - 1]i_c(t) = 0; \\ [LD + R_1]i_L(t) + \frac{1}{CD}i_c(t) = E; \end{cases} \quad (1.3)$$

Неизвестный ток $i_L(t)$ можно найти по формуле Крамера

$$i_L(t) = \frac{\Delta_L}{\Delta}; \quad i_L(t)\Delta = \Delta_L,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{R_2CD} - 1 \\ LD + R_1 & \frac{1}{CD} \end{vmatrix} = \frac{R_2LCD^2 + (R_1R_2C + L)D + R_1 + R_2}{R_2CD}$$

— определитель системы, вычисленный по правилу треугольников, а

$$\Delta_L = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2CD} - 1 \\ E & \frac{1}{CD} \end{vmatrix} = \frac{E}{R_2CD} + E$$

— определитель полученный из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов.

Подставим определители Δ , Δ_L в формулу Крамера

$$i_L(t) \left[\frac{R_2LCD^2 + R_1R_2CD + LD + R_1 + R_2}{R_2CD} \right] = \frac{E}{R_2CD} + E];$$

$$i_L(t) \left[D^2 + \frac{R_1R_2C + L}{R_2LC}D + \frac{R_1 + R_2}{R_2LC} \right] = \frac{E}{R_2LC} + \frac{ER_2C}{R_2LC}D, \quad (16')$$

если выполним обратную замену $D \rightarrow \frac{d}{dt}$, $\frac{1}{D} \rightarrow \int dt$, то получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение (12').

Из (16') получаем результат аналогичный (16):

$$D^2 + \frac{R_1R_2C + L}{R_2LC}D + \frac{R_1 + R_2}{R_2LC} = 0.$$

2.6 Определение корней характеристического уравнения

Найдем корни характеристического уравнения полученного ранее различными способами

$$\alpha^2 + \frac{R_1R_2C + L}{R_2LC}\alpha + \frac{R_1 + R_2}{R_2LC} = 0.$$

Для облегчения расчетов сделаем замену

Подп. и дата	
Инв. № дубл.	
Взам. инв. №	
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	БГТУ.04.131.030.00КР	Лист
						8

$$\delta = \frac{R_1 R_2 C + L}{2 R_2 LC} = \frac{350 \cdot 600 \cdot 6 \times 10^{-6} + 0.1}{2 \cdot 600 \cdot 0.1 \cdot 6 \times 10^{-6}} = 1888.89 \frac{1}{c};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_2 LC}} = \sqrt{\frac{350 + 600}{600 \cdot 0.1 \cdot 6 \times 10^{-6}}} = 1624.47 \frac{1}{c}.$$

Проверим размерность δ и ω_0 , для этого в формулах заменим элементы на их размерности:

$$\delta = \frac{[OM][OM][\Phi] + [\Gamma_H]}{[OM][\Gamma_H][\Phi]} = \frac{\left[\frac{B}{A}\right] \left[\frac{B}{A}\right] \left[\frac{Ac}{B}\right] + \left[\frac{Bc}{A}\right]}{\left[\frac{B}{A}\right] \left[\frac{Bc}{A}\right] \left[\frac{Ac}{B}\right]} = \frac{1}{c};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{[OM] + [OM]}{[OM][\Gamma_H][\Phi]}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{B}{A}\right] + \left[\frac{B}{A}\right]}{\left[\frac{B}{A}\right] \left[\frac{Bc}{A}\right] \left[\frac{Ac}{B}\right]}} = \frac{1}{c}.$$

С учетом замены уравнение (16) преобразуется к виду

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0. \quad (17)$$

Из (17) следует, что корни α_1 и α_2 имеют размерность $\frac{1}{c}$.

Решение уравнения (17) будет иметь вещественные корни, так как $\delta > \omega$:

$$\alpha_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -1888.89 - \sqrt{1888.89^2 - 1624.47^2} = -2852.74 \frac{1}{c};$$

$$\alpha_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -1888.89 + \sqrt{1888.89^2 - 1624.47^2} = -925.04 \frac{1}{c}. \quad (18)$$

2.7 Запись решения свободной составляющей $u_c(t)$

Выражение свободной составляющей напряжения определяется видом корней характеристического уравнения (17). Так как корни α_1, α_2 вещественные, выражение свободного напряжения имеет вид:

$$u_{c \text{ св}}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (19)$$

Уравнение (19) физически определяет поведение цепи при отсутствии внешних источников электрической энергии.

2.8 Расчет принужденной составляющей u_c

Установившийся режим цепи обусловлен действием источников энергии, и поэтому принужденная составляющая u_c , в случае постоянного напряжения $[E - \text{const}]$,

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	БГТУ.04.131.030.00КР	Лист
						9
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		
Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инд. № дубл.	Подп. и дата		

может быть найдена методами расчета установившегося процесса в цепи после коммутации. В схеме изображенной на рис. 2 закоротим индуктивность [$u_L(t) = \frac{di_L}{dt}$ — при постоянном токе напряжение на катушке не изменяется] и разорвем ветвь с емкостью — нарисована пунктиром [$i_c(t) = \frac{du_c}{dt}$ — при постоянном напряжении ток в цепи с конденсатором равен нулю $i_c = 0$], таким образом в цепи на рис. 3 все установившиеся токи не будут зависеть от времени.

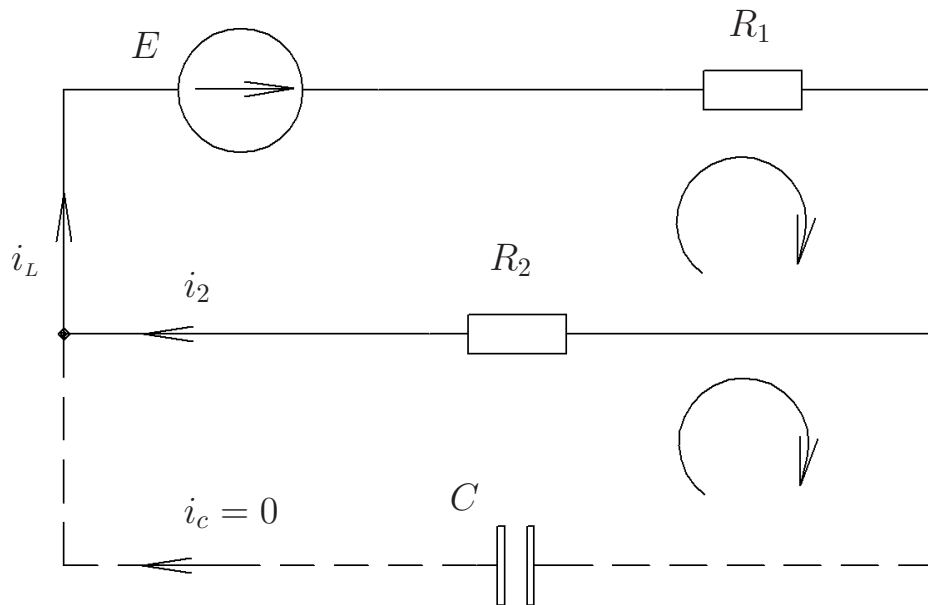


Рис. 3

По второму закону Кирхгофа (рис. 3) напряжение на конденсаторе после коммутации

$$u_c = R_2 i_L. \quad (20)$$

Так как $i_c = 0$, то ток через резистор R_2 в установившемся процессе

$$i_2 = i_L = \frac{1}{R_1 + R_2} E = \frac{100}{350 + 600} = 0.11. \quad (21)$$

Подставляя (21) \rightarrow (20), найдем

$$u_c = i_L R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = \frac{600 \cdot 100}{350 + 600} = 63.16 \text{ В} \quad (22)$$

Тот же результат мы получим, если в уравнении (8) учесть, что производная от константы равна нулю (принужденная составляющая напряжения u_c не является функцией времени [$u_c = f(E)$])

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} u_{c \text{ пр}} = \frac{E}{LC} \Leftrightarrow u_{c \text{ пр}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$

Уравнение (22) и последнее выражение представляют принужденную состав-

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	

ляющую напряжения на конденсаторе.

2.9 Расчет начальных независимых и зависимых условий по законам коммутации и исходной системе уравнений при $t = 0_+$

Под начальными независимыми условиями понимают значения токов индуктивных катушек $i_L(0_-)$ и напряжений на конденсаторах $u_c(0_-)$ до коммутации.

До коммутации в ветви с конденсатором ключ был разомкнут, значит $u_c(0_-) = 0$. Используя второй закон коммутации $u_c(0_-) = u_c(0_+)$, получаем ННУ на конденсаторе

$$u_c(0_-) = u_c(0_+) = 0 \text{ В.} \quad (23)$$

Ток на катушке $i_L(0_-)$ до коммутации равен выражению (21) [до и после переходного процесса в цепи с конденсатором ток равен нулю; состав цепи не изменился] т. е. $i_L(0_-) = \frac{1}{R_1 + R_2} E$. Используя первый закон коммутации $i_L(0_-) = i_L(0_+)$, получаем ННУ на катушке индуктивности

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = \frac{1}{R_1 + R_2} E = \frac{100}{350 + 600} = 0.11 \text{ А.} \quad (24)$$

В схеме рис. 1 имеют место ненулевые начальные условия, так как к началу переходного процесса перед коммутацией ток на катушке не равен нулю.

Для определения постоянных интегрирования A_1 и A_2 необходимо знать зависимые начальные условия т. е. $\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0_+}$ (см. раздел 2.10). Значения токов и напряжений при $t = 0_+$ (в послекоммутационной схеме) определяемые по ННУ из системы (2.4) называются зависимыми начальными условиями.

Для определения НЗУ перепишем систему уравнений (1.1) для момента времени $t = 0_+$:

$$\begin{cases} i_L(0_+) - i_2(0_+) - i_c(0_+) = 0; \\ L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0_+} + R_1 i_L(0_+) + R_2 i_2(0_+) = E; \\ -R_2 i_2(0_+) + u_c(0_+) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$i_c(0_+) = C \left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0_+}.$$

Подставим в систему (2.4) ННУ (23), (24).

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	БГТУ.04.131.030.00КР	Лист
						11
Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инд. № дубл.	Подп. и дата		

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1 + R_2} E - i_2(0_+) - i_c(0_+) = 0; \\ L \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0_+} + R_1 i_L(0_+) + R_2 i_2(0_+) = E; \\ -R_2 i_2(0_+) + 0 = 0. \end{cases}$$

$$i_c(0_+) = C \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+}$$

После элементарных преобразований

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1 + R_2} E - i_c(0_+) = 0; \\ L \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0_+} + R_1 \frac{1}{R_1 + R_2} E = E; \\ i_c(0_+) = C \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Разрешив систему (2.5) относительно $\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+}$, получим

$$\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{E}{C(R_1 + R_2)} = \frac{100}{6 \times 10^{-6}(350 + 600)} = 17543.86. \quad (25)$$

2.10 Запись полного решения $u_c(t)$

Полное напряжение с учетом (22) и (19):

$$u_c(t) = u_{c \text{ пр}} + u_{c \text{ св}}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (26)$$

Полное напряжение $u_c(t)$ — это то напряжение, которое в действительности имеется между некоторыми точками электрической цепи при переходном процессе.

В выражении (26) неизвестными являются только постоянные интегрирования.

2.11 Определение постоянных интегрирования A_1 и A_2

Из выражения (26) при $t = 0$ находим:

$$\begin{cases} u_c(0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E + A_1 + A_2; \\ \frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Подставим численные ННУ (23), $u_{c \text{ пр}}$ — (22), НЗУ (25) и корни (18) определенные выше в систему (2.6):

Подп. и дата	
Инв. № дубл.	
Взам. инв. №	
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист
12

$$\begin{cases} 0 = 63.16 + A_1 + A_2; \\ 17543.86 = (-2852.74)A_1 + (-925.04)A_2. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из системы (2.7) находим

$$A_1 = 21.21;$$

$$A_2 = -84.36.$$

2.12 Численное определение токов и напряжений в схеме

Подставим в (26) численные значения корней (18) и постоянные интегрирования определенные выше

$$u_c(t) = \frac{600 \cdot 100}{350 + 600} + 21.21e^{-2852.74t} - 84.36e^{-925.04t} = (63.16 + 21.21e^{-2852.74t} - 84.36e^{-925.04t}) \text{ В.}$$

Второй ток найдем из уравнения (4)

$$i_2(t) = \frac{u_c(t)}{R_2} = \frac{63.16 + 21.21e^{-2852.74t} - 84.36e^{-925.04t}}{600} = (0.11 + 0.04e^{-2852.74t} - 0.14e^{-925.04t}) \text{ А.}$$

Из (5) найдем ток через конденсатор

$$\begin{aligned} i_c(t) &= C \frac{d}{dt}(u_c) = 6 \times 10^{-6} \frac{d}{dt}(63.16 + 21.21e^{-2852.74t} - 84.36e^{-925.04t}) = \\ &= (-0.36e^{-2852.74t} + 0.47e^{-925.04t}) \text{ А.} \end{aligned}$$

Первый ток — из системы (1.1) уравнение (2):

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_2(t) + i_c(t) = (0.11 + 0.04e^{-2852.74t} - 0.14e^{-925.04t}) + (-0.36e^{-2852.74t} + 0.47e^{-925.04t}) = \\ &= (0.11 - 0.33e^{-2852.74t} + 0.33e^{-925.04t}) \text{ А.} \end{aligned}$$

Напряжение на катушке индуктивности — из уравнения (3) с учетом уравнения связи $u_L(t) = \frac{di_L}{dt}$:

$$\begin{aligned} u_L(t) &= E - R_1 i_L(t) - R_2 i_2(t) = 100 - 350(0.11 - 0.33e^{-2852.74t} + 0.33e^{-925.04t}) - \\ &- 600(0.11 + 0.04e^{-2852.74t} - 0.14e^{-925.04t}) = (93.47e^{-2852.74t} - 30.31e^{-925.04t}) \text{ В.} \end{aligned}$$

Подчеркнем, что отсутствие в $u_L(t)$ принужденной составляющей говорит о том, что напряжение на катушке после переходного процесса будет равным нулю.

Падение напряжения на R_1 :

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	БГТУ.04.131.030.00КР	Лист
											13

$$u_{R_1}(t) = R_1 i_L(t) = 350[0.11 - 0.33e^{-2852.74t} + 0.33e^{-925.04t}] = \\ = (36.84 - 114.67e^{-2852.74t} + 114.67e^{-925.04t}) \text{ В.}$$

Падение напряжения на R_2 :

$$u_{R_2}(t) = R_2 i_2(t) = 600[0.11 + 0.04e^{-2852.74t} - 0.14e^{-925.04t}] = \\ = (63.16 + 21.21e^{-2852.74t} - 84.36e^{-925.04t}) \text{ В.}$$

Напряжение $u_{R_2}(t)$ равно $u_c(t)$, что соответствует уравнению (4)

$$-u_{R_2}(t) + u_c(t) = 0.$$

Инд. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инд. № дудл.
Подп. и дата	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист

14

3 Решение задачи операторным методом

Необходимость определения постоянных интегрирования из начальных условий в ряде случаев сильно осложняет расчет переходных процессов классическим методом решения линейных дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы. По мере усложнения электрических схем и возрастания порядка дифференциального уравнения, трудности связанные с нахождением постоянных интегрирования увеличиваются.

Более удобным является операторный метод решения линейных дифференциальных уравнений, при котором заданные начальные условия включаются в исходные уравнения и для нахождения искомых функций не требуется дополнительно определять постоянные интегрирования.

В основу операторного метода положено следующее. Функция $f(t)$ [обычно ток $i(t)$ или напряжение $u(t)$] вещественного переменного t (времени), называемая оригиналом, заменяется соответствующей ей функцией $F(p)$ комплексного переменного p , называемой изображением.

Эти функции связаны соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

называемым прямым преобразованием Лапласа.

Порядок решения задачи операторным методом сводится к следующему:

3.1 Определение начальных условий схемы после коммутации ($t = 0_+$)

Из курса математики известно, что $f(t) \doteq F(p)$ и $\frac{df}{dt} \doteq pF(p) - f(0)$, где $f(0)$ — начальное значение функции.

Запишем полученные ННУ (23) (24) при $t = 0_+$

$$u_c(0_+) = 0. \quad (27)$$

$$i_L(0_+) = \frac{1}{R_1 + R_2} E = \frac{1}{350 + 600} 100 = 0.11 \text{ A}. \quad (28)$$

(27) и (28) начальные значения функций $u_c(t)$, $i_L(t)$.

Подп. и дата	
Инв. № дубл.	
Взам. инв. №	
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист
15

3.2 Составление операторной схемы замещения

При ненулевых начальных условиях в схему для изображений последовательно с индуктивностью включается дополнительный источник ЭДС, совпадающий с положительным направлением тока, равный $Li_L(0_+)$ (рис. 5, а), а последовательно с емкостью — дополнительный источник ЭДС, противоположно направленный с положительным направлением тока в ветви, равный $\frac{u_c(0_+)}{p}$ (рис. 5, б).

В соответствии с выше сказанным составим операторную схему замещения после коммутации с учетом начальных условий (27), (28) рис. 6.

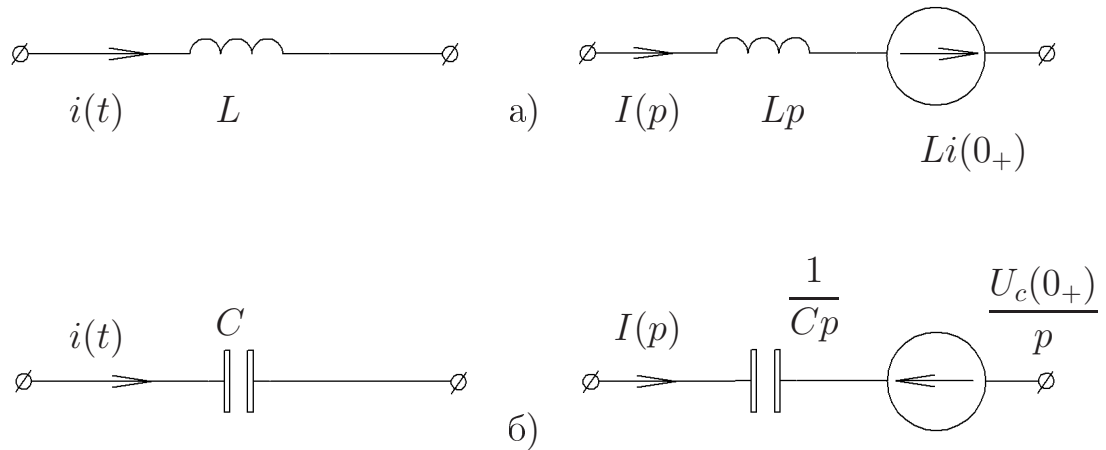


Рис. 5

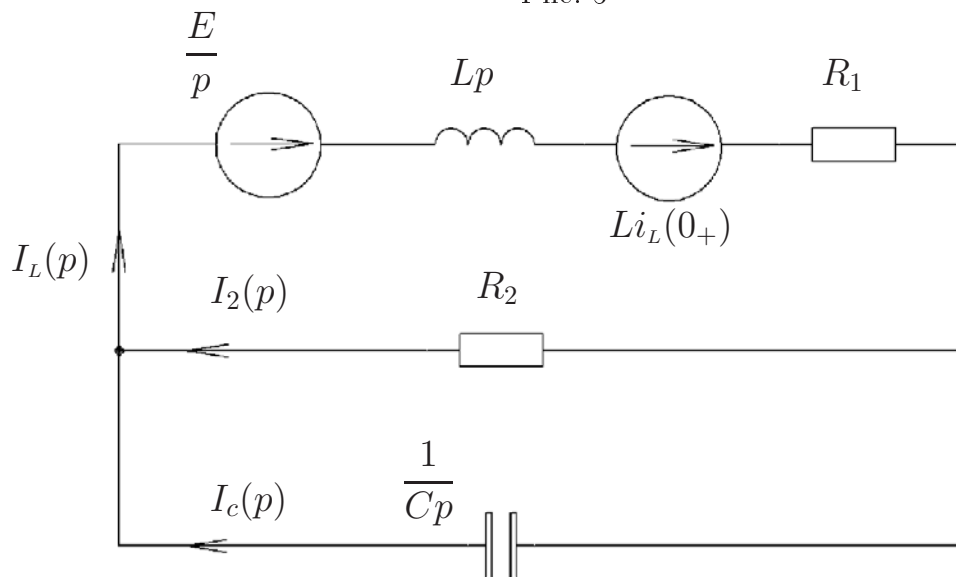


Рис. 6 - Операторная схема замещения

Инд. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инд. № дубл.
Подп. и дата	Подп. и дата
Изм.	Лист

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

3.3 Составление системы алгебраических уравнений в операторном виде

Операторные сопротивления цепей записывают так же, как и сопротивления для тех же цепей в комплексной форме, в которых $j\omega$ заменено на p . Будем рассматривать E , $i(t)$ как функции оригиналы, имеющие изображения $\frac{E}{p}$ (константа), $I(p)$ [функция комплексного переменного $p = \sigma + j\eta$, где σ — показатель роста функции $i(t)$], таким образом система (1.1) с учетом (27) и (28) примет вид

$$\begin{cases} I_L(p) - I_2(p) - I_c(p) = 0; & (29) \\ LpI_L(p) + R_1I_L(p) + R_2I_2(p) = \frac{E}{p} + Li_L(0_+); & (30) \\ -R_2I_2(p) + U_c(p) = 0. & (31) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$I_c(p) = CpU_c(p). \quad (32)$$

3.4 Нахождение операторного изображения искомой величины $U_c(p)$

Найдем из системы (2.8) изображение $U_c(p)$.

Подставим (32) → (31)

$$I_2(p) = \frac{I_c(p)}{R_2Cp}. \quad (33)$$

(33) → (30), выразив $I_L(p)$

$$I_L(p) = \frac{E(p)C - I_c(p) + LpI_L(0_+)}{Cp(Lp + R_1)}. \quad (34)$$

Подставим (33) и (34) → (29) уравнение системы и выразим $I_c(p)$:

$$I_c(p) = \frac{R_2C[E + LpI_L(0_+)]}{R_2LCp^2 + R_1R_2Cp + Lp + R_1 + R_2}. \quad (35)$$

(35) → (32), найдем изображение $U_c(p)$ преобразовав в виде правильной дроби

$$\begin{aligned} U_c(p) &= \frac{I_c(p)}{Cp} = \frac{R_2C[E + LpI_L(0_+)]}{Cp(R_2LCp^2 + R_1R_2Cp + Lp + R_1 + R_2)} = \\ &= \frac{R_2[E + LpI_L(0_+)]}{p(R_2LCp^2 + R_1R_2Cp + Lp + R_1 + R_2)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Изм. №	Изм. №	Изм. №	Изм. №	Изм. №
подл.	дубл.	инв. №	взам. инв. №	подл. и дата

3.5 Нахождение оригинала искомой функции $u_c(t)$

В выражении (36) приравняем к нулю знаменатель:

$$p(R_2LCp^2 + R_1R_2Cp + Lp + R_1 + R_2) = 0. \quad (37)$$

Продифференцируем (37)

$$3R_2LCp^2 + 2R_1R_2Cp + 2Lp + R_1 + R_2 = 0. \quad (38)$$

Найденные корни уравнения (37) :

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -2852.74 \frac{1}{c}, \quad p_3 = -925.04 \frac{1}{c}. \quad (39)$$

Запишем теорему разложения

$$U_c(p) = \frac{G(p)}{H(p)} \doteq \frac{G(p_1)}{H'(p_1)} e^{p_1 t} + \sum_{k=2}^3 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t},$$

так как $p_1 = 0$, то можем записать

$$U_c(p) \doteq \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^3 \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (40)$$

В выражении (40) справа от знака соответствия есть функция времени — оригинал, состоящий из принужденной $\frac{G(0)}{H'(0)}$, и остальной части (под знаком суммы) — свободной составляющей напряжения.

Знаменателем $H'(p)$ в (40) является выражение (38)

$$H(p) = 3R_2LCp^2 + 2(R_1R_2C + L)p + R_1 + R_2.$$

$$H(p)|_{p \rightarrow p_1} = 0 + 0 + 350 + 600 = 950;$$

$$H(p)|_{p \rightarrow p_2} = 3 \cdot 600 \cdot 0.1 \cdot 6 \times 10^{-6} (-2852.74)^2 + 2(350 \cdot 600 \cdot 6 \times 10^{-6} + 0.1)(-2852.74) + 350 + 600 = 1979.72;$$

$$H(p)|_{p \rightarrow p_3} = 3 \cdot 600 \cdot 0.1 \cdot 6 \times 10^{-6} (-925.04)^2 + 2(350 \cdot 600 \cdot 6 \times 10^{-6} + 0.1)(-925.04) + 350 + 600 = -641.95.$$

Числитель $G(p)$ в (40) — из выражения (36)

$$G(p) = R_2[E + Lpi_L(0_+)].$$

$$G(p)|_{p \rightarrow p_1} = 600[100 + 0] = 60000;$$

$$G(p)|_{p \rightarrow p_2} = 600[100 + 0.1(-2852.74)0.11] = 41982.7;$$

$$G(p)|_{p \rightarrow p_3} = 600[(100 + 0.1(-925.04)0.11] = 54157.7.$$

В соответствии с формулой (40) вычислим дроби

Инд. № подл.	Подл. и дата
Взам. инв. №	Инд. № дубл.
Подл. и дата	Подл. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	БГТУ.04.131.030.00КР	Лист
						18

$$\begin{aligned}\frac{G(p_1)}{H(p_1)} &= \frac{60000}{950} = 63.16; \\ \frac{G(p_2)}{H(p_2)} &= \frac{41982.7}{1979.72} = 21.21; \\ \frac{G(p_3)}{H(p_3)} &= \frac{54157.7}{-641.95} = -84.36,\end{aligned}$$

и подставим в (40):

$$u_c(t) = 63.16 + 21.21e^{-2852.74t} - 84.36e^{-925.04t}. \quad (41)$$

Найденный оригинал напряжения совпадает с решением полученным классическим методом (подраздел 2.12).

3.6 Нахождение изображения величины $I_L(p)$

Найдем из системы (2.8) изображение $I_L(p)$.

Найдем из (32) и (31) $I_c(p)$ и подставим его в (29)

$$I_L(p) - I_2(p) - R_2 C p I_2(p) = 0. \quad (\star)$$

Из (30) найдем $I_2(p)$ и подставим в (\star) , выразив $I_L(p)$

$$I_L(p) = \frac{R_2 L C i_L(0) p^2 + (L i_L(0) + E R_2 C C) p + E}{p(R_2 L C p^2 + R_1 R_2 C p + L p + R_1 + R_2)}. \quad (\star\star)$$

3.7 Нахождение оригинала функции $i_L(t)$

Оригинал найдем по теореме разложения (40). Так как занаменатели изображений $U_c(p)$, $I_L(p)$ идентичны, то и корни (39) будут одинаковыми (различие в корнях было бы ошибкой!).

Числитель $G(p)$ в (40) — из выражения $(\star\star)$

$$G(p) = R_2 L C i_L(0) p^2 + (L i_L(0) + E R_2 C) p + E.$$

$$G(p)|_{p \rightarrow p_1} = 0 + 0 + 100 = 100;$$

$$G(p)|_{p \rightarrow p_2} = 600 \cdot 0.1 \cdot 6 \times 10^{-6} \cdot 0.11(-2852.74) + (0.1 \cdot 0.11 + 100 \cdot 600 \cdot 6 \times 10^{-6}) \cdot (-2852.74) + 100 = -648.62;$$

$$G(p)|_{p \rightarrow p_3} = 600 \cdot 0.1 \cdot 6 \times 10^{-6} \cdot 0.11(-925.04) + (0.1 \cdot 0.11 + 100 \cdot 600 \cdot 6 \times 10^{-6}) \cdot (-925.04) + 100 = -210.32.$$

В соответствии с формулой (40) вычислим дроби (соответствующие знаменатели изображений $I_L(p)$ и $U_c(p)$ равны)

$$\frac{G(p_1)}{H(p_1)} = \frac{100}{950} = 0.11;$$

Подп. и дата	
Инв. № дубл.	
Взам. инв. №	
Подп. и дата	
Инв. № подл.	

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист

19

$$\frac{G(p_2)}{H(p_2)} = \frac{-648.62}{1979.72} = -0.33;$$

$$\frac{G(p_3)}{H(p_3)} = \frac{-210.32}{-641.95} = 0.33,$$

и подставим в (40):

$$i_L(t) = 0.11 - 0.33e^{-2852.74t} + 0.33e^{-925.04t}.$$

Найденное оригинал тока совпадает с решением полученным классическим методом (подраздел 2.12).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дудл.	Подп. и дата	БГТУ.04.131.030.00КР					Лист
										20
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата						

4 Составление системы уравнений по методу переменных состояния

Метод переменных состояния представляет собой способ нахождения состояния системы в функции времени, использующий матричный метод решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в форме Коши. Под переменными состоянием понимают величины, определяющие энергетическое состояние цепи, т. е. $i_L(t)$ и $u_c(t)$. Переменные состояния в обобщенном смысле обозначим $x(t)$.

Порядок расчета метода производных состояния следующий:

4.1 Составить систему по законам Кирхгофа

Запишем полученную систему (1.1)

$$\begin{cases} i_L(t) - i_2(t) - i_c(t) = 0; & (42) \\ L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L(t) + R_2 i_2(t) = E; & (43) \\ -R_2 i_2(t) + u_c(t) = 0. & (44) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt}. \quad (45)$$

4.2 Преобразовать полученную систему в систему уравнений в форме Коши относительно производных состояния

Подставим (44) \rightarrow (43)

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1 i_L(t)}{L} - \frac{u_c(t)}{L} + \frac{E}{L}. \quad (46)$$

(44) и (45) подставив (42)

$$i_L(t) - \frac{u_c(t)}{R_2} - C \frac{du_c}{dt} = 0. \quad (47)$$

Преобразуем (47)

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{i_L(t)}{C} - \frac{u_c(t)}{R_2 C}. \quad (48)$$

Уравнения (46) и (48) запишем в форме Коши

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} u_c(t) + \frac{1}{L} E; \\ \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_L(t) - \frac{1}{R_2 C} u_c(t) + 0 \cdot E. \end{cases}$$

Инв. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инв. № дубл.
Подп. и дата	Подп. и дата

Если принять, что $i_L(t) = x_1(t)$, $u_c(t) = x_2(t)$, $-\frac{R_1}{L} = a_{11}$, $-\frac{1}{L} = a_{12}$, $\frac{1}{C} = a_{21}$, $-\frac{1}{R_2 C} = a_{22}$, $\frac{1}{L} = b_{11}$, $0 = b_{21}$, $E = f_1$, то получим

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_{11}f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_{21}f_1. \end{cases} \quad (3.0)$$

Полученная система (3.0) является системой уравнений в форме Коши.

Из системы (3.0) запишем матрицу коэффициентов стоящих перед $x_1(t)$, $x_2(t)$, порядка $n \times n$, где n — количество переменных состояния

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3500 & -10 \\ 166666.67 & -277.78 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Матрица $[A]$ содержит все пассивные элементы электрической цепи рис. 2.

Из системы (3.0) запишем матрицу коэффициентов стоящих перед входными воздействиями, т. е. при E , порядка $n \times m$, где m — количество источников,

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

ННУ (23) и (24), полученные ранее, объединим в систему, при этом учтем нашу предыдущую замену $i_L(t) = x_1(t)$ и $u_c(t) = x_2(t)$

$$\begin{cases} x_1(0_-) = x_1(0_+) = \frac{E}{R_1 + R_2}; \\ x_2(0_-) = x_2(0_+) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

По системе (3.1) запишем матрицу начальных условий — матрица-столбец порядка n

$$[X(0)] = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1 + R_2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Из (3.0) получим матрицу-столбец входных воздействий, порядка $m = 1$

$$[F] = \begin{bmatrix} f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

С учетом (49), (51), (54) систему (3.0) приведем к виду

Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист
22

$$[\dot{X}(t)] = [A][X(t)] + [B][F], \quad (53)$$

где $[X(t)]$ матрица искомым величин (переменных состояния), а $[\dot{X}(t)]$ — ее дифференциал.

Объединим (53) и (55) в матричную систему уравнений по переменным состояния

$$\begin{cases} [\dot{X}(t)] = [A][X(t)] + [B][F]; \\ [X(0)]. \end{cases} \quad (3.2)$$

4.3 Найти переменные состояния

Решение системы (3.2) представляется в виде

$$[X(t)] = e^{[A]t}[X(0)] + \int_0^t e^{[A](t-\tau)}[B][F(\tau)]d\tau. \quad (54)$$

Первое слагаемое в формуле (54) описывает свободные процессы в системе, второе — принужденные при нулевом исходном состоянии.

Матричную функцию $e^{[A]t}$ в формуле (54) вычисляют по формуле Сильвестра:

$$e^{[A]t} = e^{\lambda_1 t}[A_1] + e^{\lambda_2 t}[A_2] + \dots + e^{\lambda_n t}[A_n],$$

где λ_n — собственные значения (характеристические числа) квадратной матрицы $[A]$, т. е. это корни уравнения

$$\det([A] - \lambda[E]) = \det \left(\begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{R_1}{L} - \lambda & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2 C} - \lambda \end{vmatrix} = \left(-\frac{R_1}{L} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{R_2 C} - \lambda\right) - \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{L}\right) = 0. \quad (55)$$

Преобразовав (55), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \lambda + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} = 0,$$

которое имеет корни $\lambda_1 = -2852.74$ $\lambda_2 = -925.04$ размерности α , т. е. $\frac{1}{c}$

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дубл.	Подп. и дата	Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	БГТУ.04.131.030.00КР	Лист
											23

5 Построение графиков токов и напряжений

Переходный процесс теоретически длится бесконечно долго.

$$\begin{array}{cccccccc} t & = & \tau & 2\tau & 3\tau & 4\tau & 5\tau & \infty \\ \frac{i_{CB}(t)}{I} 100\% & = & 63.2\% & 86.5\% & 95.0\% & 98.2\% & 99.3\% & 100\% \end{array}$$

Практически можно считать, что он заканчивается спустя $t = (4 \div 5)\tau_{max}$. Постоянная времени равна промежутку времени, в течение которого свободная составляющая тока убывает в $e = 2.718$ раза и соответственно ток в этой цепи, включенной на постоянное напряжение, достигает 63.2% своего установившегося значения.

Расчитаем постоянную времени τ_{max}

$$\tau_{max} = -\frac{1}{\alpha_{min}} = -\frac{1}{-925.036} = 0.0011 \frac{1}{c}$$

Построим графики напряжений для проверки второго закона Кирхгофа — уравнение (3): $u_L(t) + u_{R_1}(t) + u_{R_2}(t) = E = 100 \text{ В}$ рис. 7.

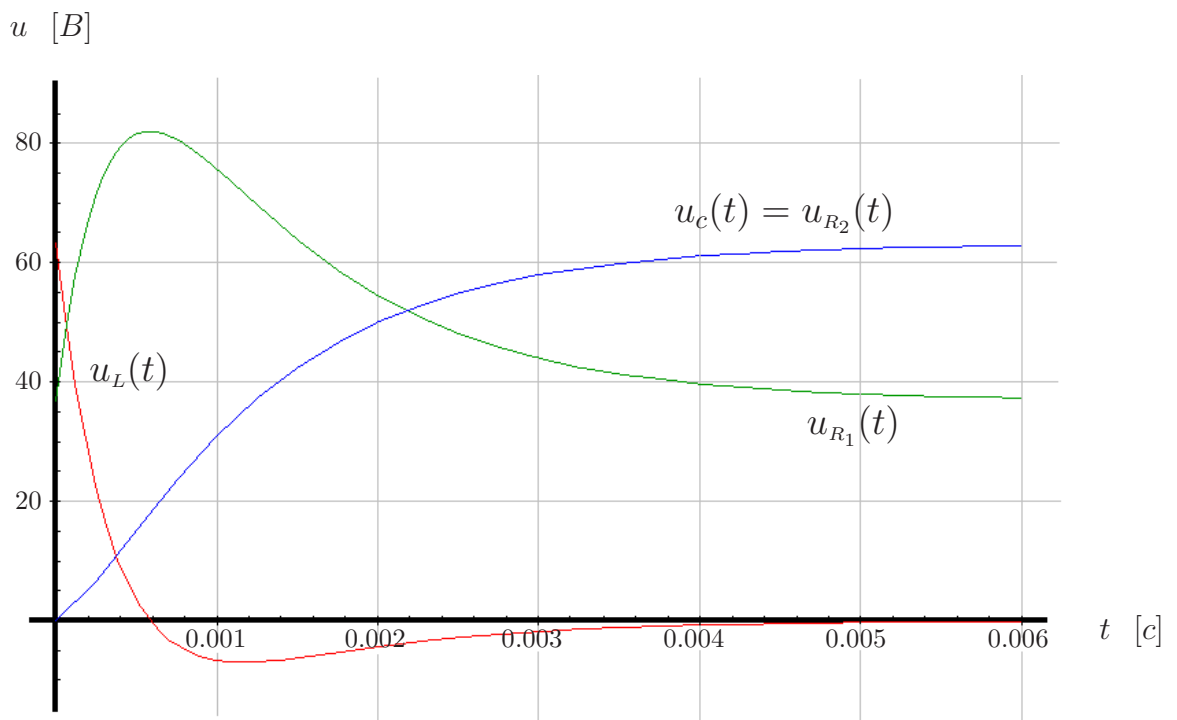


Рис. 7

Проверку для (4) делать не будем т. к. формулы по которым строятся графики идентичны (подраздел 2.12).

На катушке индуктивности (см. рис. 1) до коммутации падение напряжения равнялось нулю (в цепи источник постоянного напряжения). В момент времени $t = 0$

Инд. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инд. № дубл.
Подп. и дата	
Инд. № подл.	

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист
24

(в момент коммутации) скачкообразно изменилось напряжение $u_L(t)$ (см. рис. 7) до $63.16B$, к концу переходного процесса оно стремится к нулю ($u_{L\text{ пр}} = 0$).

До коммутации в ветви с конденсатором ключ разомкнут, следовательно конденсатор не был заряжен. В момент коммутации напряжение $u_c(t)$ не изменяется (это противоречило бы закону коммутации) т. е. равно нулю. В момент времени после коммутации ($t = 0_+$) происходит плавное изменение. К концу переходного процесса напряжение на конденсаторе стремится к $u_{\text{пр}}$ (к установившемуся процессу, что тоже самое — при нахождении $u_{\text{пр}}$ мы переписали уравнение (8) при $t = \infty$) т. е. к $63.16 B$.

Ток в цепи до коммутации $i_L = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0.11 A$ равен $i_{L\text{ пр}}$, следовательно до и после переходного процесса напряжение будет $36.86 B$ ($u_{R_1} = R_1 i_L = 350 \cdot 0.11 = 36.86 B$), что подтверждается на графике рис. 7. Изменение напряжения начинается с $36.86 B$ и к концу переходного процесса стремится к $36.86 B$.

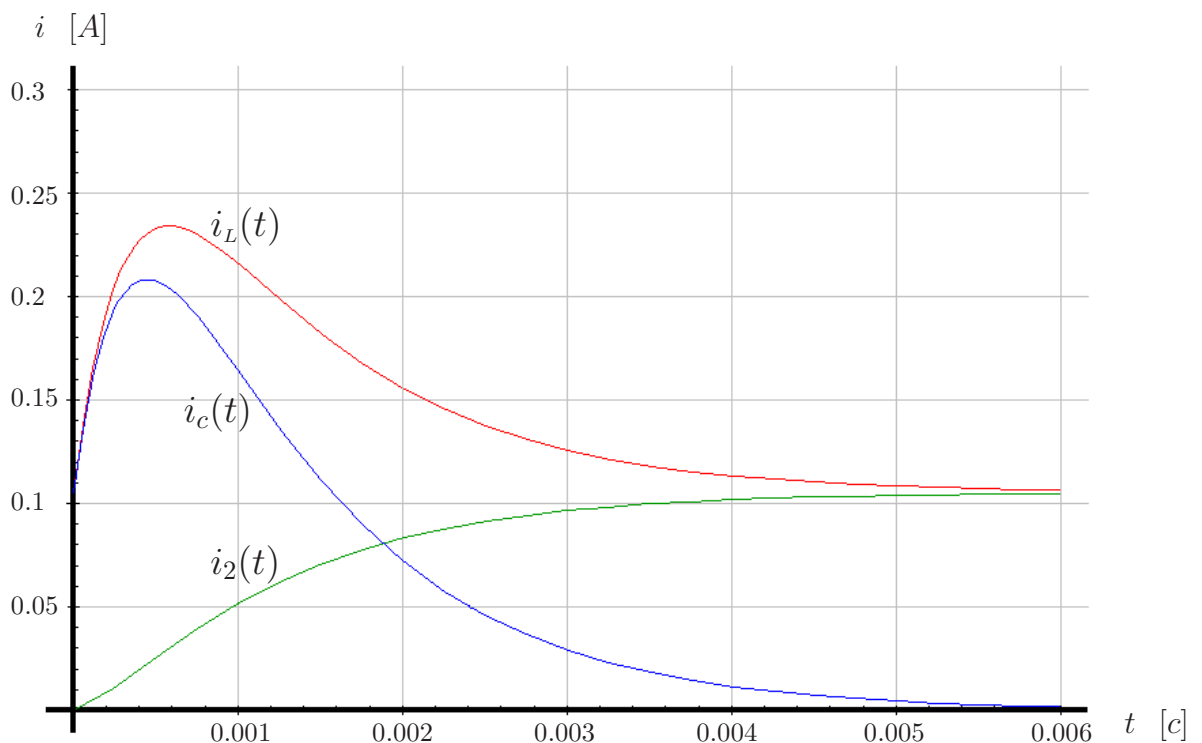


Рис. 8

5.1 Проверка графиков токов и напряжений

Для формул полных токов

$$i_{Lk}(t) = 0.11 - 0.33e^{-2852.74t_k} + 0.33e^{-925.04t_k};$$

$$i_{2k}(t) = 0.11 + 0.04e^{-2852.74t_k} - 0.14e^{-925.04t_k};$$

$$i_{ck}(t) = -0.36e^{-2852.74t_k} + 0.47e^{-925.04t_k};$$

полученных различными способами, в конкретные моменты времени вычислим их значения

Инд. № подл.	Подп. и дата
Взам. инв. №	Инд. № дубл.
Подп. и дата	
Инд. № подл.	

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0.001$	$t_3 = 0.003$	$t_4 = 0.005$
$i_L(t)$	0.105	0.216	0.126	0.108
$i_2(t)$	0	0.052	0.097	0.104
$i_c(t)$	0.105	0.165	0.029	0.005

Тоже для полных напряжений

$$u_{c\ k}(t) = 63.16 + 21.21e^{-2852.74t_k} - 84.36e^{-925.04t_k};$$

$$u_{L\ k}(t) = 93.47e^{-2852.74t_k} - 30.31e^{-925.04t_k};$$

$$u_{R_1\ k}(t) = 36.84 - 114.67e^{-2852.74t_k} + 114.67e^{-925.04t_k}$$

$$u_{R_2\ k}(t) = 63.16 + 21.21e^{-2852.74t_k} - 84.36e^{-925.04t_k}$$

	$t_1 = 0$	$t_2 = 0.001$	$t_3 = 0.003$	$t_4 = 0.005$
$u_c(t)$	0	30.929	57.903	62.331
$u_L(t)$	63.158	-6.626	-1.871	-0.297
$u_{R_1}(t)$	36.84	75.70	43.97	37.97
$u_{R_2}(t)$	0	30.929	57.903	62.331

Инд. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инд. № дудл.	Подп. и дата

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

БГТУ.04.131.030.00КР

Лист

26

Курсовая работа рассчитана в математическом пакете “Mathematica 5”, и оформлена в системе для верстки текстов с формулами — L^AT_EX версии 1.3.4 (близка к L^AT_EX).

Инв. № подл.	Подп. и дата	Взам. инв. №	Инв. № дудл.	Подп. и дата	БГТУ.04.131.030.00КР					Лист
										27
					Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	

Список литературы

- [1] Методические указания к домашним заданиям по расчету электрических цепей. / Под ред. А. П. Лысенко. - Л.: - ЛМИ, 1984. с 37-49.
- [2] Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники, ч. I, Линейные электрические цепи, изд. 4-е, М., "Энергия", 1970.
- [3] Л. А. Бессонов. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. - 7-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. школа, 1978.
- [4] Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие. 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. школа, 1982.

<i>Инд. № подл.</i>	<i>Подл. и дата</i>	<i>Взам. инв. №</i>	<i>Инд. № дудл.</i>	<i>Подп. и дата</i>	БГТУ.04.131.030.00КР					<i>Лист</i>					
															28
<i>Изм.</i>	<i>Лист</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Подп.</i>	<i>Дата</i>											