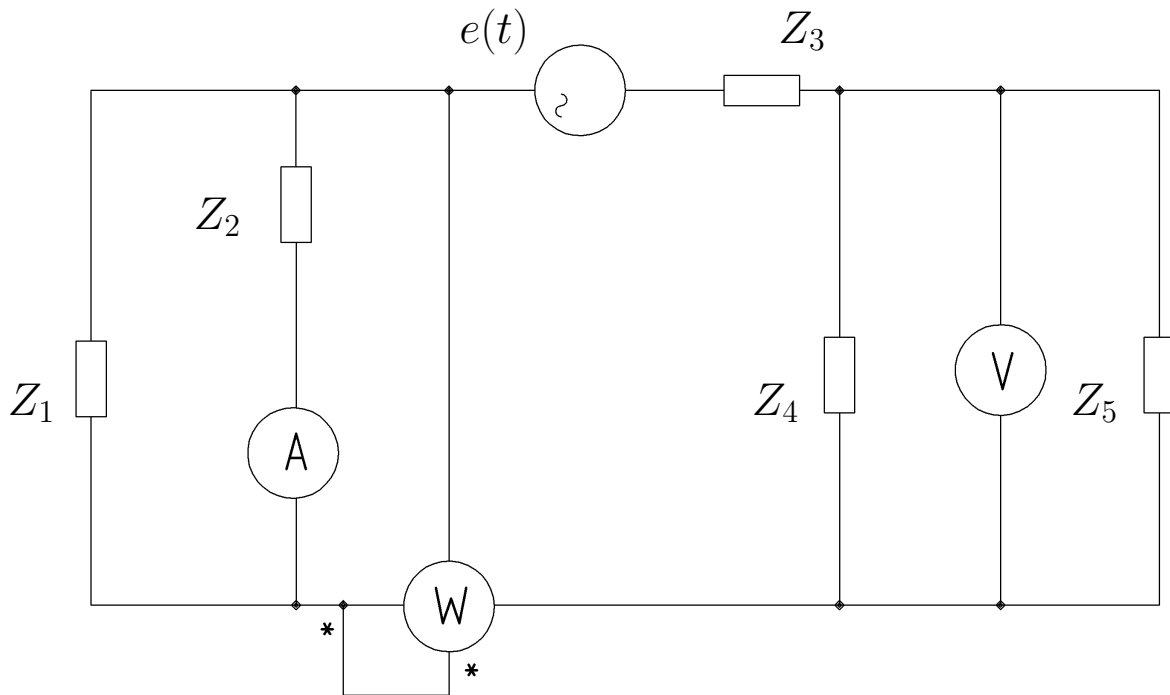


Исходные данные

Схема цепи



Синусоидальное ЭДС: $e(t) = E_m \sin(2\pi ft + \psi)$, где

$$E_m = 179 \text{ В};$$

$$f = 50 \text{ Гц};$$

$$\psi = 60^\circ.$$

Сопротивления элементов цепи:

$$Z_1 = R = 10 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = jX_L = j30 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = -jX_C = -j40 \text{ Ом};$$

$$Z_4 = R = 50 \text{ Ом};$$

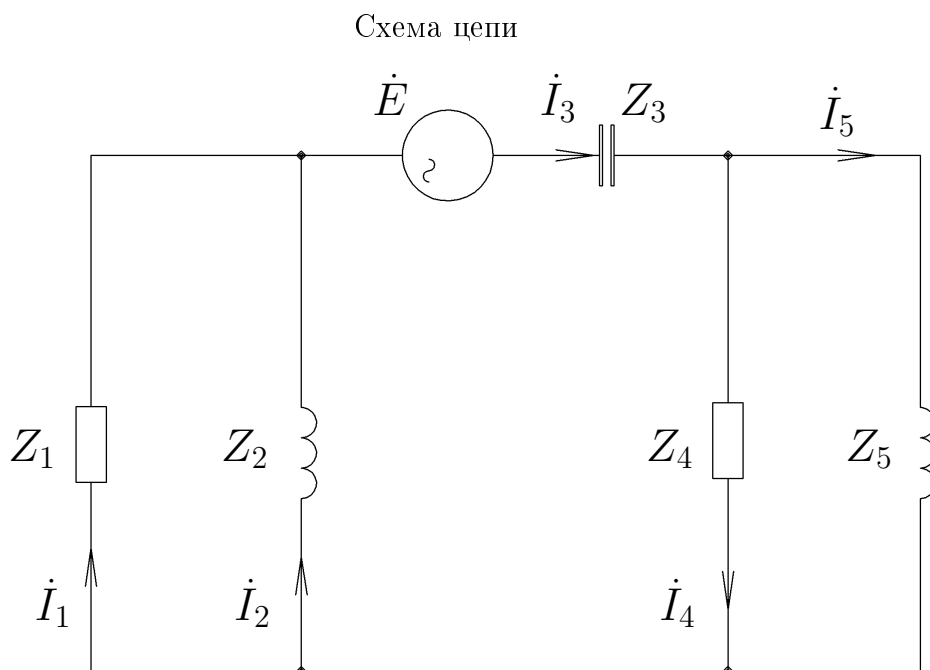
$$Z_5 = jX_L = j60 \text{ Ом}.$$

Требуется:

1. Составить по законам Кирхгофа в комплексной форме, для мгновенных значений системы алгебраических уравнений. Решить на ЭВМ.
2. Записать значения найденных в п.1 комплексов токов и комплексов напряжений на всех участках цепи в алгебраической и показательной форме. Перейти от комплексов токов и напряжений к их мгновенным значениям.
3. Рассчитать токи и напряжения на всех участках цепи методом эквивалентных преобразований. Сравнить результаты, полученные в п.2 и 3.

4. Проверить баланс активных и реактивных мощностей.
5. Определить показания амперметра, вольтметра и ваттметра.
6. Построить векторные диаграммы токов и напряжений.
7. Определить сопротивление каждого элемента при изменении частоты в n раз.
8. Составить систему уравнений методом контурных токов.
9. Составить систему уравнений методом узловых потенциалов.
10. Рассчитать ток на R_5 цепи методом эквивалентного генератора.

1 Составление по законам Кирхгофа в комплексной форме, для мгновенных значений системы алгебраических уравнений



$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cos(\psi) + j \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin(\psi) = \frac{179}{\sqrt{2}} \cos(60^\circ) + j \frac{179}{\sqrt{2}} \sin(60^\circ) = (63,29 + j109,62) \text{ В},$$

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = 126,57 e^{j60^\circ} \text{ В}.$$

Система в комплексной форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_4 - \dot{I}_5 = 0 \\ Z_1 \dot{I}_1 - Z_2 \dot{I}_2 = 0 \\ Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 \dot{I}_3 + Z_4 \dot{I}_4 = \dot{E} \\ -Z_4 \dot{I}_4 + Z_5 \dot{I}_5 = 0 \end{cases}$$

Система для мгновенных значений:

$$\begin{cases} i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0 \\ i_3(t) - i_4(t) - i_5(t) = 0 \\ R_1 i_1(t) - L \frac{di_2(t)}{dt} = 0 \\ L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_4(t) dt + R_4 i_4(t) = e(t) \\ -R_4 i_4(t) + L \frac{di_5(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Запись системы уравнений в матричной форме, откуда находим токи:

$$[Z] \cdot [I] = [U],$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 10 & -j30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j30 & -j40 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -50 & j60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 63,29 + j109,62 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем напряжение:

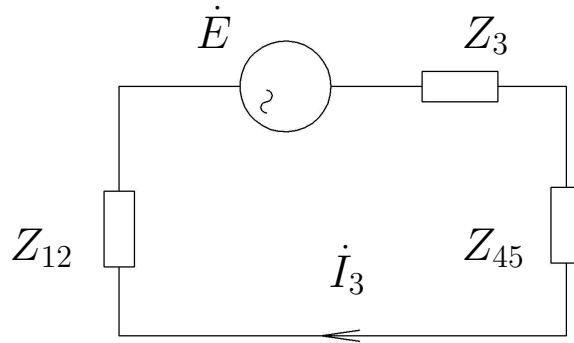
$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \\ \dot{U}_4 \\ \dot{U}_5 \end{pmatrix}.$$

2 Результаты расчета

Рас- четная вел.		Результаты расчета на машине в комплексных значениях	Мгновенные значения	Результаты рас- чета методом эквив. преобр.
\dot{I}_1	A	$-0,33 + j2,95 = 2,98e^{j96,30^\circ}$	$i_1(t) = 4,21\sin(\omega t + 96,30^\circ)$	$2,98e^{j96,30^\circ}$
\dot{I}_2	A	$0,98 + j0,11 = 0,99e^{j6,30^\circ}$	$i_2(t) = 1,40\sin(\omega t + 6,30^\circ)$	$0,99e^{j6,30^\circ}$
\dot{I}_3	A	$0,66 + j3,06 = 3,13e^{j77,90^\circ}$	$i_3(t) = 4,43\sin(\omega t + 77,90^\circ)$	$3,13e^{j77,90^\circ}$
\dot{I}_4	A	$-1,12 + j2,13 = 2,40e^{j117,67^\circ}$	$i_4(t) = 3,39\sin(\omega t + 117,69^\circ)$	$2,40e^{j117,67^\circ}$
\dot{I}_5	A	$1,77 + j0,93 = 2,0e^{j27,68^\circ}$	$i_5(t) = 2,83\sin(\omega t + 27,68^\circ)$	$2,0e^{j27,68^\circ}$
\dot{U}_1	B	$-3,26 + j29,50 = 29,67e^{j96,30^\circ}$	$u_1(t) = 41,96\sin(\omega t + 96,30^\circ)$	$29,67e^{j96,30^\circ}$
\dot{U}_2	B	$-3,26 + j29,50 = 29,67e^{j96,30^\circ}$	$u_2(t) = 41,96\sin(\omega t + 96,30^\circ)$	$29,67e^{j96,30^\circ}$
\dot{U}_3	B	$122,34 - j26,31 = 125,14e^{-j12,10^\circ}$	$u_3(t) = 176,97\sin(\omega t - 12,10^\circ)$	$125,14e^{-j12,10^\circ}$
\dot{U}_4	B	$-55,80 + j106,43 = 120,17e^{j117,67^\circ}$	$u_4(t) = 169,95\sin(\omega t + 117,67^\circ)$	$120,17e^{j117,67^\circ}$
\dot{U}_5	B	$-55,80 + j106,43 = 120,17e^{j117,67^\circ}$	$u_5(t) = 169,95\sin(\omega t + 117,67^\circ)$	$120,17e^{j117,67^\circ}$

3 Расчет методом эквивалентных преобразований

Эквивалентная схема цепи



$$Z_{12} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{10 \cdot j30}{10 + j30} = (9 + j3) \text{ Ом};$$

$$Z_{45} = \frac{Z_4 \cdot Z_5}{Z_4 + Z_5} = \frac{50 \cdot j60}{50 + j60} = (29,51 + j24,59) \text{ Ом};$$

$$Z_{\Sigma} = Z_{12} + Z_3 + Z_{45} = (9 + j3) - j40 + (29,51 + j24,59) = (38,51 - j12,41) \text{ Ом}.$$

Далее расчет по закону Ома:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}}{Z_{\Sigma}} = \frac{63,29 + j109,62}{38,51 - j12,41} = (0,66 + j3,06) \text{ А};$$

$$\dot{U}_3 = Z_3 \cdot \dot{I}_3 = -j40(0,66 + j3,06) = (122,34 - j26,31) \text{ В};$$

$$\dot{U}_4 = \dot{U}_5 = Z_{45} \cdot \dot{I}_3 = (29,51 + j24,59)(0,66 + j3,06) = (-55,80 + j106,43) \text{ В};$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = Z_{12} \cdot \dot{I}_3 = (9 + j3)(0,66 + j3,06) = (-3,26 + j29,50) \text{ В};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{-3,26 + j29,50}{10} = (-0,33 + j2,95) \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{-3,26 + j29,50}{j30} = (0,98 + j0,11) \text{ А};$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_4}{Z_4} = \frac{-55,80 + j106,43}{50} = (-1,12 + j2,13) \text{ А};$$

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_5}{Z_5} = \frac{-55,80 + j106,43}{j60} = (1,77 + j0,93) \text{ А}.$$

4 Проверка баланса активных и реактивных мощностей

$$\dot{E} \cdot I_{\text{ист}}^* = \sum_{k=1}^5 Z_k \cdot I_k^2$$

$$I_{\text{ист}}^* = I_3^* = (0,66 - j3,06) \text{ А.}$$

Определяем мощность источника:

$$\dot{E} \cdot I_3^* = (63,29 + j109,62)(0,66 - j3,06) = (376,89 - j121,46) \text{ В.}$$

Проводим оценку мощности приемников:

$$\sum_{k=1}^5 Z_k \cdot I_k^2 = 10(2,98)^2 + j30(0,99)^2 - j40(3,13)^2 + 50(2,40)^2 + j60(2,0)^2 = (376,89 - j121,46) \text{ В.}$$

Проводим оценку баланса по формулам:

$$\delta P = \frac{P_{\text{ист}} - P_{\text{пр}}}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{376,89 - 376,89}{376,89} \cdot 100\% = -1,51 \cdot 10^{-14}\%.$$

$$\delta Q = \frac{Q_{\text{ист}} - Q_{\text{пр}}}{Q_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{-121,46 + 121,46}{-121,46} \cdot 100\% = -3,51 \cdot 10^{-14}\%.$$

Полученное расхождение находится в пределах погрешности вычислений ЭВМ.

5 Определение показаний приборов

Амперметр показывает действующий ток:

$$I_A = I_2 = 0,99 \text{ А.}$$

Вольтметр - действующее напряжение:

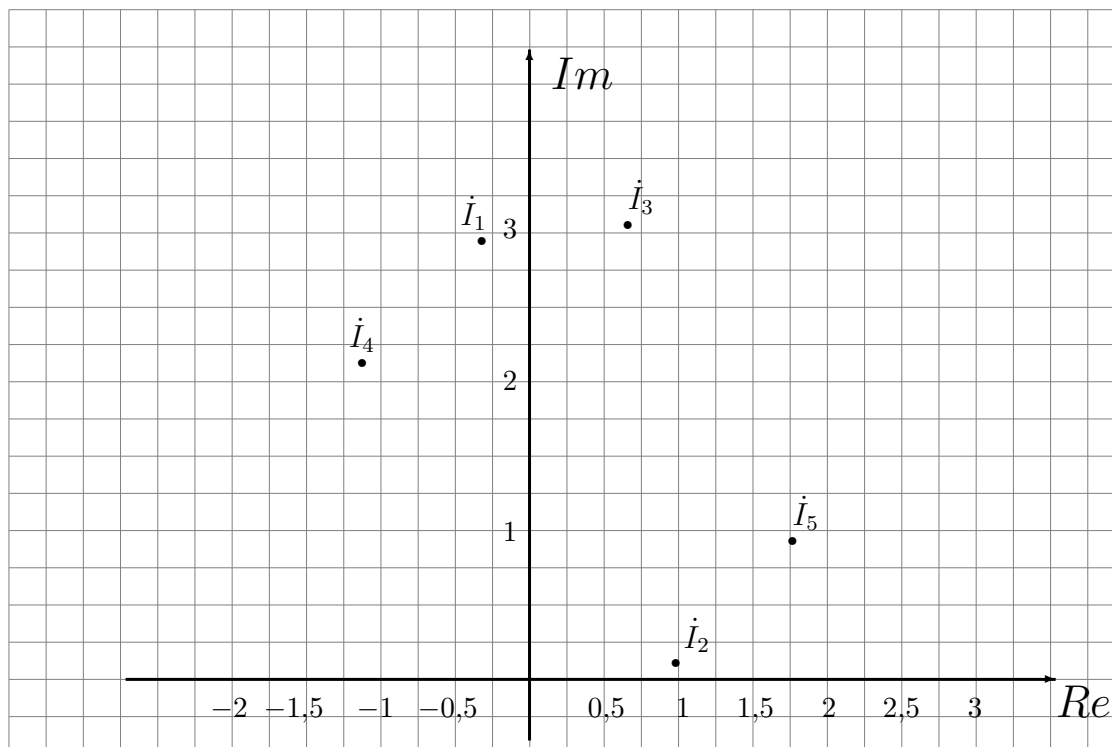
$$U_V = U_4 = U_5 = 120,17 \text{ В.}$$

Показания ваттметра определяются произведением действующих значений:

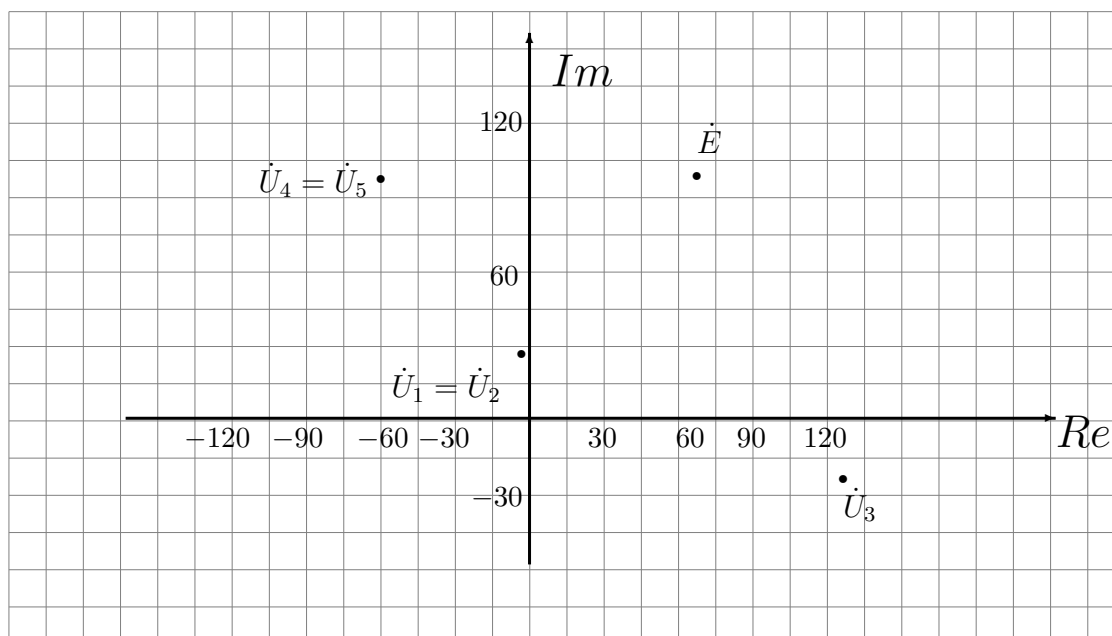
$$P_W = U_2 \cdot I_3 \cdot \cos(\bar{U}_2, \bar{I}_3) = 29,67 \cdot 3,13 \cdot \cos(96,30^\circ - 77,90^\circ) = 81,38 \text{ Вт.}$$

6 Построение векторной диаграммы токов и напряжений

Векторная диаграмма тока:



Векторная диаграмма напряжения:



7 Определение сопротивления элементов при изменении частоты

Исходя из того, что емкостное сопротивление обратно пропорционально изменению частоты, индуктивное сопротивление прямо пропорционально и активное сопротивление не зависит от частоты (при малых частотах), то:

$$Z_1 = R = 10 \text{ Ом};$$

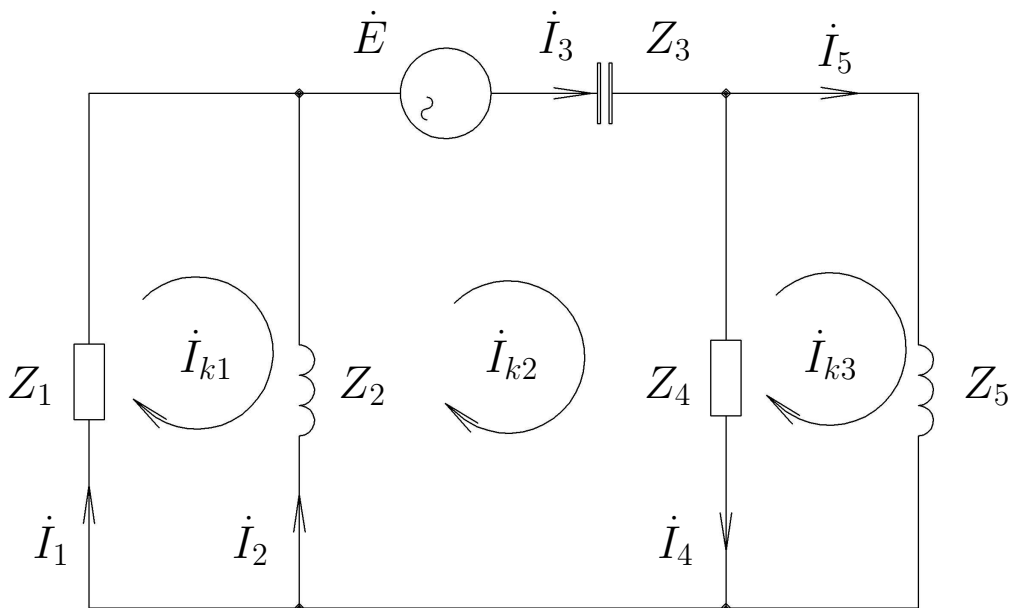
$$Z_2 = jX_L \cdot n = j30 \cdot 3 = j90 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = \frac{-jX_C}{n} = \frac{-j40}{3} = -j13,33 \text{ Ом};$$

$$Z_4 = R = 50 \text{ Ом};$$

$$Z_5 = jX_L \cdot n = j60 \cdot 3 = j180 \text{ Ом}.$$

8 Составление системы уравнений методом контурных токов



$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2)\dot{I}_{k1} & - Z_2\dot{I}_{k2} & & = 0 \\ -Z_2\dot{I}_{k1} + (Z_2 + Z_3 + Z_4)\dot{I}_{k2} & & - Z_4\dot{I}_{k3} & = \dot{E} \\ & -Z_4\dot{I}_{k2} + (Z_4 + Z_5)\dot{I}_{k3} & & = 0 \end{cases}$$

Из системы уравнений составим матрицы:

$$\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 & 0 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 + Z_4 & -Z_4 \\ 0 & -Z_4 & Z_4 + Z_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{I}_{k1} \\ \dot{I}_{k2} \\ \dot{I}_{k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение системы:

$$\dot{I}_{k1} = (-0,33 + j2,95) \text{ A};$$

$$\dot{I}_{k2} = (0,66 + j3,06) \text{ A};$$

$$\dot{I}_{k3} = (1,77 + j0,93) \text{ A}.$$

Токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{k1} = (-0,33 + j2,95) \text{ A};$$

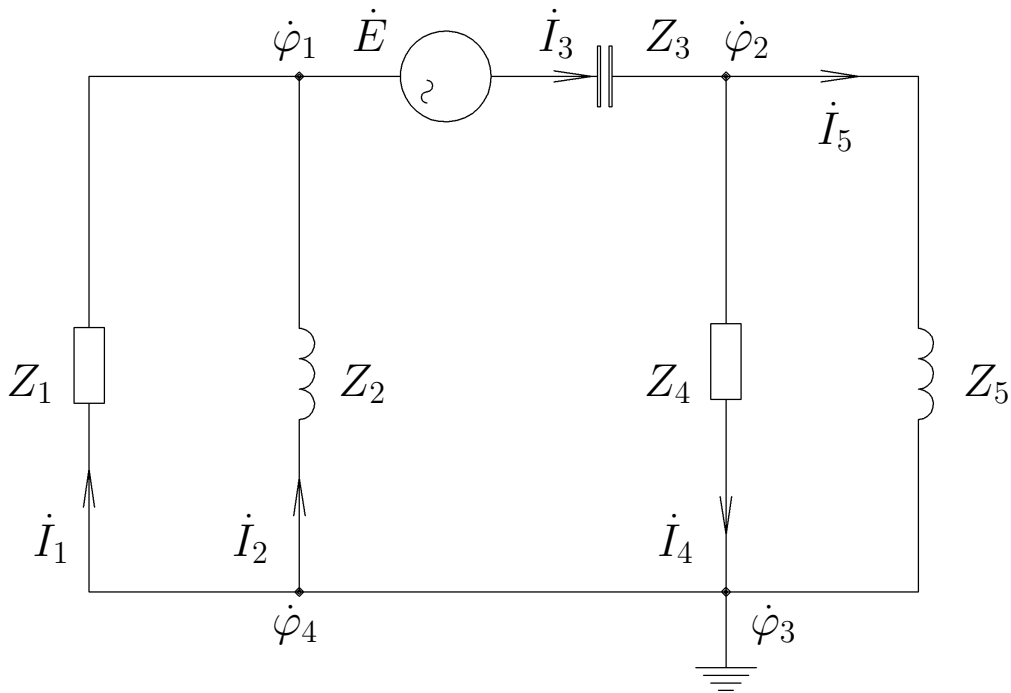
$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{k2} - \dot{I}_{k1} = (0,66 + j3,06) - (-0,33 + j2,95) = (0,98 + j0,11) \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{k2} = (0,66 + j3,06) \text{ A};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{k2} - \dot{I}_{k3} = (0,66 + j3,06) - (1,77 + j0,93) = (-1,12 + j2,13) \text{ A};$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_{k3} = (1,77 + j0,93) \text{ A}.$$

9 Составление системы уравнений методом узловых потенциалов



Примем $\dot{\varphi}_3$ за базовый узел (т.е. $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_4 = 0$), и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} Y_{11}\dot{\varphi}_1 - Y_{12}\dot{\varphi}_2 = \dot{I}_{31} \\ -Y_{21}\dot{\varphi}_1 + Y_{22}\dot{\varphi}_2 = \dot{I}_{32} \end{cases},$$

где:

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{j30} + \frac{1}{-j40} = (0,10 - j0,01) \text{ См};$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{-j40} = j0,03 \text{ См};$$

$$Y_{22} = \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} = \frac{1}{-j40} + \frac{1}{50} + \frac{1}{j60} = (0,02 + j0,01) \text{ См};$$

$$\dot{I}_{31} = -\frac{\dot{E}}{Z_3} = -\frac{63,29 + j109,62}{-j40} = (2,74 - j1,58) \text{ А};$$

$$\dot{I}_{32} = \frac{\dot{E}}{Z_3} = \frac{63,29 + j109,62}{-j40} = (-2,74 + j1,58) \text{ А}.$$

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 0,10 - j0,01 & -j0,03 \\ -j0,03 & 0,02 + j0,01 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,74 - j1,58 \\ -2,74 + j1,58 \end{pmatrix}.$$

Полученные потенциалы:

$$\dot{\varphi}_1 = (3,26 - j29,50) \text{ В};$$

$$\dot{\varphi}_2 = (-55,80 + j106,43) \text{ В}.$$

Находим токи:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_1}{Z_1} = \frac{0 - (3,26 - j29,50)}{10} = (-0,33 + j2,95) \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_1}{Z_2} = \frac{0 - (3,26 - j29,50)}{j30} = (0,98 + j0,11) \text{ А};$$

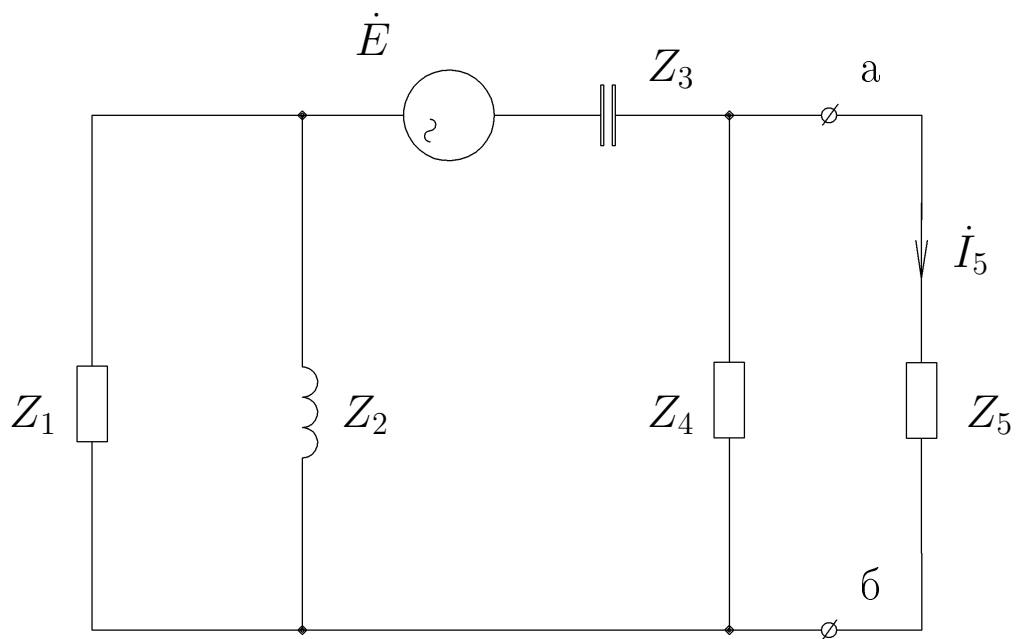
$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \frac{\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2 + \dot{E}}{Z_3} = \frac{(3,26 - j29,50) - (-55,80 + j106,43) + (63,29 + j109,62)}{-j40} = \\ &= (0,66 + j3,06) \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3}{Z_4} = \frac{(-55,80 + j106,43) - 0}{50} = (-1,12 + j2,13) \text{ А};$$

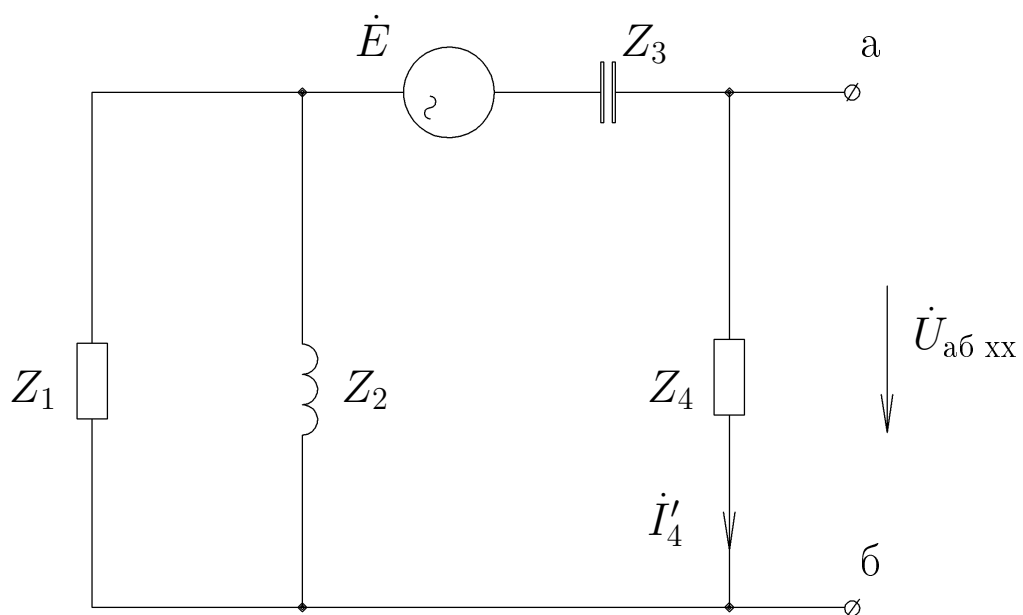
$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3}{Z_5} = \frac{(-55,80 + j106,43) - 0}{j60} = (1,77 + j0,93) \text{ А}.$$

10 Рассчитать ток \dot{I}_5 методом эквивалентного генератора

Находим ЭДС эквивалентного генератора $\dot{E}_{\text{эГ}} = \dot{U}_{\text{аб хх}}$ методом эквивалентных преобразований. Для схемы $\dot{U}_{\text{аб хх}} = Z_4 \dot{I}'_4$, где \dot{I}'_4 - комплекс тока, проходящего по сопротивлению Z_4 , при условии, что ветвь с сопротивлением Z_5 разомкнута.



Определим ток \dot{I}'_4 по схеме:

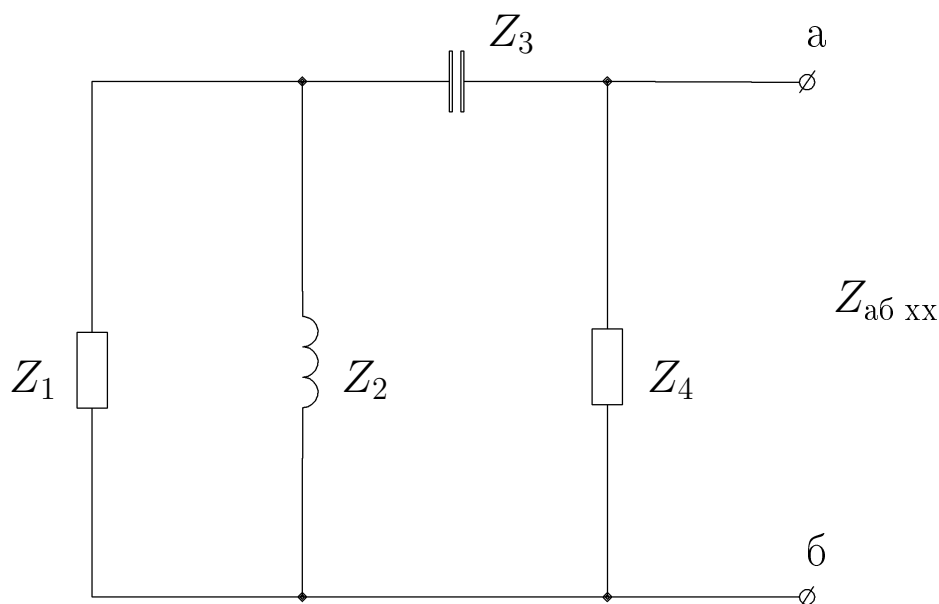


$$\dot{I}'_4 = \frac{\dot{E}}{Z_{12} + Z_3 + Z_4} = \frac{63,29 + j109,62}{(9 + j3) - j40 + 50} = (59 - j37) \text{ A.}$$

ЭДС эквивалентного генератора и его сопротивление равны:

$$\dot{E}_{\text{ЭГ}} = \dot{U}_{\text{аб xx}} = Z_4 \cdot \dot{I}'_4 = 50(59 - j37) = (-3,32 + j90,82) \text{ В.}$$

Определим сопротивление эквивалентного генератора как эквивалентное сопротивление цепи по отношению к зажимам сопротивления Z_5 :



$$Z_{12} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{10 \cdot j30}{10 + j30} = (9 + j3) \text{ Ом};$$

$$Z_{123} = Z_{12} + Z_3 = (9 + j3) - j40 = (9 - j37) \text{ Ом};$$

$$Z_{\text{эГ}} = \frac{Z_{123} \cdot Z_4}{Z_{123} + Z_4} = (19,59 - j19,07) \text{ Ом}.$$

Искомый ток:

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{\text{эГ}}}{Z_{\text{эГ}} + Z_5} = \frac{-3,32 + j90,82}{(19,59 - j19,07) + j60} = (1,77 + 0,93) \text{ А}.$$